Finitiserbarhetsresultater for noen setningslogiske modalsystemer

av

Morten Harboe Rognes

1971

(Bearbeidet og renskrevet januar 2009)

© Morten Harboe Rognes

§1 Innledning

Hensikten med dette arbeidet er å vise hvordan halvsyntaktiske modeller av den typen vi har arbeidet med tidligere kan brukes til å vise endel finitiserbarhetsresultater for setningslogiske modallogikker. I første omgang viser vi at systemene T, K og KD ikke er endelig aksiomatiserbare. Dernest går vi et skritt videre og gir bevis for at dette også gjelder systemene E2, S2 og systemene i rekken S2(m).[1] Det bør bemerkes dette skrift fordrer et forholdsvis inngående kjennskap til Rognes [1], [2], [3] og [4]. Særlig Rognes [4] er viktig siden vi her uten videre bruker en del begrepsdannelser som er forklart detaljert der, men som vi ikke har funnet det nødvendig å gjøre rede for i dette arbeidet.

§2 Systemet T. Systemsekvensen <T;n>/nêN/

I det følgende er L det språket for modal setningslogikk vi har definert tidligere. PC* står for mengden av alle de formler i L som er setningslogisk gyldige.

Hoved formålet med denne paragrafen er å levere et bevis for at at det velkjente modallogiske systemet T ikke kan aksiomatiseres ved hjelp av en endelig mengde med formler i L gitt at slutningsreglene bare er modus ponens og uniform substitusjon. For å oppnå dette mål skal vi definere og studere egenskapene til en sekvens av systemer <T;n>/nêN/ der hvert system i rekken er inkludert i T. Vi starter med å definere denne rekken av systemer.

Definisjon 2.1
(a) Definer induktivt en mengde av formler i L slik:
(i) $AxT;0 = PC^* \cup \{L\alpha\rightarrow\alpha: \alpha\hat{e}Fm(L)\} \cup \{L(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow L\alpha\rightarrow L\beta: \alpha,\beta\hat{e}Fm(L)\}$
(ii) $AxT;(n+1) = AxT;n \cup \{L\alpha: \alpha\hat{e}AxT;n\}$
(b) La T;n være den minste formelmengden som inneholder AxT;n og som er lukket under modus ponens.

Vi har direkte fra definisjonen at AxT;n Inkl AxT;(n+1). Det følger at T;n Inkl T;(n+1). Vi har også at (1) $\alpha\hat{e}T;n \rightarrow L\alpha\hat{e}T;(n+1)$. Det er ganske lett å bevise dette: Er $\alpha\hat{e}AxT;n$ er det åpenbart at $L\alpha\hat{e}AxT;(n+1)$ Inkl T;(n+1). Anta $L\alpha\hat{e}T;(n+1)$ & $L(\alpha\rightarrow\beta)\hat{e}T;(n+1)$. Siden $L(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow L\alpha\rightarrow L\beta$ er et aksiom i T;(n+1) og T;(n+1) er lukket under modus ponens følger da at $L\beta\hat{e}T;(n+1)$. Påstanden (1) følger da ved induksjon på T;n.

For hvert nêN defineres en klasse av halvsyntaktiske modeller av annet slag som svarer til systemet T;n. Denne mengden av modeller betegnes med ||T;n||. En modell Mê||T;n|| hvis og bare hvis $M= <\upsilon,\Gamma,\varphi>$ er en halvsyntaktisk modell av annet slag og Γ oppfyller de følgende to krav om n>0: (i) AxT;(n-1) Inkl Γ og (ii) Γ er lukket under modus ponens. Er n=0 krever vi bare at Γ er lukket under modus ponens. Man kan vise:

Teorem 2.1: Er αêFm(L) har man, om n>=0, at
$\alpha\hat{e}T;n \leftrightarrow (AM)(M\hat{e}||T;n|| \rightarrow \pi;3(M)(\alpha)=1)$

1 Resultatet for systemet T er nevnt i Kripke [2], side 219. De andre resultatene er ikke nevnt i Kripke [1], [2]. Jeg går imidlertid utfra at det dreier seg om velkjente satser.

© Morten Harboe Rognes

Bevis: Vi tar først for oss gyldighetsdelen. Først viser vi at alle teoremene i T;0 holder i enhver T;0-modell. Dette er opplagt for formlene i PC*. Er M=<υ,Γ,φ> en vilkårlig T;0-modell har vi etter definisjonen av valusajonsfunksjonen φ at φ(Lα)=1 → φ(α)=1. Men fra dette følger i lys av definisjonen av φ at φ(Lα→α)=1. Alle formler av typen Lα→α holder derfor i enhver T;0-modell. Anta igjen at M=<υ,Γ,φ> en vilkårlig T;0-modell. Vi skal vise at formelen L(α→β)→Lα→Lβ holder i M. Anta φ(L(α→β))=1. Da har vi ved hjelp av definisjonen av φ at (1) φ(α→β)=1 & (α→β)êΓ. Anta nå at (2) φ(Lα)=1. Da følger (3) φ(α)=1 & αêΓ. Siden Γ er lukket under modus ponens følger fra (1) og (3) at φ(β)=1 & βêΓ. Man har altså at følgende holder: φ(L(α→β))=1 & φ(Lα)=1 → φ(Lβ)=1. Herav følger i lys av definisjonen av φ at φ(L(α→β)→Lα→Lβ)=1. Dette viser at alle aksiomene i T;0 holder i enhver T;0-modell.

Det er også nødvendig å vise at modus ponens bevarer gyldighet. Anta derfor (4) (AM)(Mê||T;0|| → π;3(M)(α)=1) og (5) (AM)(Mê||T;0|| → π;3(M)(α→β)=1). La M=<υ,Γ,φ> være en vilkårlig T;0-modell. Da har vi ved hjelp av (4) og (5) at φ(α)=1 & φ(α→β)=1. Men fra dette følger φ(β)=1. Det følger at β holder i alle T;0-modeller, med andre ord er β også T;0-gyldig.

La oss så vise at alle teoremene i T;(n+1) holder i enhver modell i ||T;(n+1)||, gitt, som induksjonshypotese, at alle teoremer i T;n holder i enhver modell i ||T;n|| (n>0).

Iakta først at man har: (6) ||T;(n+1)|| Inkl ||T;n||. For anta M=<υ,Γ,φ> er en T;(n+1)-modell. Da har vi pr. definisjon at Γ er lukket under modus ponens og at AxT;n Inkl Γ. Men da må vi, siden AxT;(n-1) Inkl AxT;n , ha at Γ er lukket under modus ponens og at AxT;(n-1) Inkl Γ. Men dette innebærer at M også er en T;n-modell, ie. Mê||T:n||.

For å vise at teoremene i T;(n+1) holder i alle T;(n+1)-modeller er det nødvendig å godtgjøre at alle formlene i AxT;(n+1) holder i alle modeller i ||T;(n+1)||. Anta derfor for vilkårlig α at αêAxT;(n+1).

Tilfelle (i): αêAxT;n. Da har vi at αêT;n og derfor etter induksjonshypotesen at α holder i alle modeller i ||T;n||. Det følger ved hjelp av (6) at α holder i alle modeller i ||T;(n+1)||.

Tilfelle (ii): αê{Lβ: βêAxT;n}. Da har vi (7) α=Lβ & βêAxT;n for en eller annen formel β. La M=<υ,Γ,φ> være en vilkårlig T;(n+1)-modell. da har vi AxT;n Inkl Γ. Det følger at (8) βêΓ. På den annen side har vi siden (7) holder at βêT;n og derfor, ifølge uinduksjonshypotesen holder i alle modeller i ||T;n||. Da må β også holde i alle T;(n+1)-modeller. Det følger at β holder i M. Vi har følgelig φ(β)=1, som sammen med (7) gir en φ(Lβ)=1. Det følger at φ(α)=1. Men M var en vilkårlig T;(n+1)-modell. Det følger at α også i dette tilfellet holder i alle T;(n+1)-modeller. At modus ponens bevarer T;(n+1) gyldighet bevises på nøyaktig samme måte som ved systemet T;0.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for gyldighetsdelen i satsen. La oss så gi et bevis for fullstendighetsdelen.

Anta nêN og at ¬(αêT;n). Da er {¬α} en T;n-konsistent formelmengde. Denne kan ved hjelp av Lindenbaums lemma utvides til en maksimalt T;n-konsistent mengde Δ. Da har vi naturligvis at (9) (¬α)êΔ. Definer nå T;n-modell M=<υ,Γ,φ> ved å sette:
(10) υ(p) =1 ↔ pêΔ for alle utsagnsvariabler p. Definer videre Γ ved: (11) Γ = Mg(α: LαêΔ). La endelig φ være valuasjonsfunksjonen av annet slag som er assosiert med strukturen <υ,Γ>. Ved et enkelt induksjonsbevis viser man:

(12) (Aβ)(βêFm(L) → (φ(β)=1 ↔ βêΔ)).

Vi utelater detaljene her siden beviset er basert på helt opplagte egenskaper ved maksimalt konsistente mengder, det at (Lα→α)êΔ, samt egenskaper til funksjonen φ.

© Morten Harboe Rognes

Anta n=0. Det eneste vi da behøver å vise er at Γ er lukket under modus ponens. Dette er imidlertid opplagt i lys av det forhold at (L(α→β)→(Lα→Lβ)) er et aksiom i alle systemene i rekken <T;n>/nêN/ og derfor er med i Δ. Det skulle derfor være klart at M er en T;n-modell i dette tilfellet. Anta n>0. Da må vi vise at AxT;(n-1) Inkl Γ. Anta derfor for vilkårlig γ at γêAxT;(n-1). Da har vi at LγêAxT;n Inkl T;n og derfor at LγêΔ. Dette følger fordi Δ er en maksimalt T;n-konsistent mengde og man derfor må ha at T;n Inkl Δ. Men fra dette og (11) følger γêΓ. Siden γ var en vilkårlig formel har vi derfor vist: AxT;(n-1) Inkl Γ. Vi har dermed vist at (13) Mê||T;n||. Fra (9) og (12) følger at (14) ¬(φ(α)=1). Det følger fra (13) og (14) at (EM)(Mê||T;n|| & ¬(π;3(M)(α)=1)). Dette viser at fullstendighetsdelen i teoremet holder. **QED.**

På basis av Teorem 2.1 kan vi bevise den følgende sats:

Teorem 2.2:

(a) (Aα)(αêFm(L) →. αêT;n ↔ LαêT;(n+1))
(b) (Aα)(αêFm(L) →. αêT;0 ↔ L(n)(α)êT;n)
(c) (Aα)(αêFm(L) → ¬(L(α→α)êT;0)
(d) (An)(nêN → ¬(L(n+1)(α→α)êT;n)
(e) nêN →T;n SInkl T;(n+1).

Bevis: *Ad (a)*: Kondisjonalen mot høyre er temmelig opplagt: Er αêAxT;n er det åpenbart at LαêAxT;(n+1) Inkl T;(n+1). Anta LαêT;(n+1) & L(α→β)êT;(n+1). Siden L(α→β)→Lα→Lβ er et aksiom i T;(n+1) og T;(n+1) er lukket under modus ponens følger da at LβêT;(n+1). Kondisjonalen mot høyre i (a) følger da ved induksjon på T;n. Når det gjelder kondisjonalen mot venstre går vi frem på følgende måte: Anta ¬(αêT;n). Definer vilkårlig en verditilordning υ inn i {0,1} for utsagnsvariablene i L. Sett (1) Γ =T;n. La φ være valuasjonsfunksjonen av annet slag som er assosiert med strukturen <υ,Γ>. Sett M=<υ,Γ,φ>. Da har vi at M er en T;(n+1)-modell fordi Γ er lukket under modus ponens og vi har AxT;n Inkl T;n. Men ¬(αêT;n). Dette impliserer at ¬(αêΓ) og derfor , siden φ(Lα) =1 ↔ (φ(α)=1 & αêΓ), at ¬(φ(Lα)=1). Det følger at (EM)(Mê||T;(n+1)|| & ¬(π;3(M)(Lα)=1)). Fra dette og Teorem 2.1 følger ¬(LαêT;(n+1)). Dette viser at (a) holder.

Ad (b): Påstanden bevises ved induksjon på n. For n=0 har man:
αêT;0 ↔ L(0)(α)êT;0 ↔ L(n)(α)êT;n, siden man per definisjon har L(0)(α)=α.
Anta påstanden holder for n, med andre ord at (1) αêT;0 ↔ L(n)(α)êT;n der αêFm(L). Vi skal vise at en holder for n+1: Ved hjelp av det som er bevist under punkt (a) har vi:
(2) L(n)(α) ↔ L(L(n)(α))êT;(n+1). Men L(L(n)(α)) = L(n+1)(α). Fra dette, (1) og (2) følger:
αêT;0 ↔ L(n+1)(α)êT;(n+1). Dette viser at påstanden holder for n+1 om den holder for n. Det følger at (b) holder for alle n.

Ad (c): Vi må vise at L(α→α) ikke er noe teorem i T;0. La υ være en vilkårlig tilordning av 0 eller 1 til setningsvariablene. La Γ være den tomme mengden. La φ være den valuasjonsfunksjonen av annet slag som er assosiert med modellstrukturen <υ,Γ>. Sett M= <υ,Γ,φ>. Det skulle da være klart at Γ er lukket under modus ponens og at M derfor er en T;0-modell. Men antar man φ(L(α→α))=1 vil (α→α)êΓ. Men dette er umulig siden Γ er den tomme mengden. Det følger at ¬(φ(L(α→α))=1). Fra dette og Teorem 2.1 følger at L(α→α) ikke er noe teorem i T;0.

Ad (d): Dette følger fra det vi har vist under (b) og (c). Anta nêN. Fra punkt (b) følger:
L(α→α)êT;0 ↔ L(n+1)(α→α)êT;n. Fra (c) har vi ¬(L(α→α)êT;0). Det følger at

© Morten Harboe Rognes

¬(L(n+1)(α→α)êT;n) holder for alle n.

Ad (e): Anta nêN. Det må først bevises at (1) T;n Inkl T;(n+1). Vi har imidlertid at AxT;n per definisjon er inkludert i AxT;(n+1) som utgjør aksiomene i T;(n+1). Alle aksiomene i T;n er derfor utledbare i T;(n+1). Siden T;(n+1) er lukket under modus ponens følger at (1) holder. I lys av av punkt (b) har vi åpenbart at (2) (α→α)êT;0 ↔ L(n+1) (α→α)êT;(n+1). Siden PC* Inkl T;0. Følger at (α→α)êT;0. Fra dette og (2) kan man slutte: (3) L(n+1)(α→α)êT;(n+1). Fra (d) følger imidlertid (4) ¬(L(n+1)(α→α)êT;n). Fra (1), (3) og (4) følger: T;n SInkl T;(n+1). Dette viser at (e) holder. **QED**.

La X være en mengde med formler i L. Da er Π(X) den minste formelmengden som inneholder X og som er lukket under *uniform substitusjon* og *modus ponens*. En formelmengde Δ *er endelig aksiomatiserbar*, "finitiserbar", hvis og bare hvis det finnes en *endelig* formelmengde X slik at Δ = Π(X).

Vi lar T være den minste formelmengden i L som inneholder AxT;0 og som er lukket under modus ponens og nødvendighetsregelen, det vil si slutningsregelen |-α → |-Lα.

Teorem 2.3: (Hovedresultat I) Man har:
(a) T= UN(Mg(T;n: nêN))
(b) T er ikke endelig aksiomatiserbar

Bevis: *Ad (a)*: For å vise at T Inkl UN(Mg(T;n: nêN)) må vi først vise at aksiomene i T, AxT;0 er inkludert i UN(Mg(T;n: nêN)). Men dette er opplagt siden AxT;0 Inkl T;0 og T;0 er åpenbart inkludert i UN(Mg(T;n: nêN)). I tillegg er det nødvendig å vise at UN(Mg(T;n: nêN)) er lukket under modus ponens og nødvendighetsregelen. Anta α,α→βêUN(Mg(T;n: nêN)). Da har vi at det finnes m,nêN slik at αêT;n & (α→β)êT;m. La j være det største av tallene m og n. Siden T;j Inkl T;k om j<=k, dette viser man lett ved hjelp av Teorem 2.2e, følger at α, α→βêT;j. Men T;j er lukket under modus ponens. Derfor har vi βêT;j Inkl UN(Mg(T;n: nêN)).

Anta αêUN(Mg(T;n: nêN)). Da har vi αêT;n for noe n. Ved hjelp av Teorem 2.2a følger da at LαêT;(n+1) Inkl UN(Mg(T;n: nêN)). Dette viser at UN(Mg(T;n: nêN)) er lukket under nødvendighetsregelen.

La oss så vise at UN(Mg(T;n: nêN)) Inkl T. Det vil da åpenbart være tilstrekkelig å bevise: (1) (An)(nêN → T;n Inkl T). Dette vises ved induksjon på n. Basistrinn: n=0. Vi må da vise at T;0 Inkl T. Siden T er lukket under modus ponens er det nok å vise at AxT;0 Inkl T. Men dette følger direkte fra definisjonen av T. Induksjonstrinn: Anta som induksjonshypotese at T;n Inkl T. For å vise at T;(n+1) Inkl T vil det være nok å vise at AxT;(n+1) Inkl T. Anta derfor for vilkårlig α at αêAxT;(n+1). Da har vi ifølge definisjonen av AxT;(n+1) at αêAxT;n eller at α= Lβ for en eller annen formel βêAxT;n. Tilfelle (i): αêAxT;n. Da er αêT;n som etter induksjonshypotesen er inkludert i T. Tilfelle (ii) α=Lβ & βêAxT;n. Da er βêT;n og derfor har vi etter induksjonshypotesen at βêT. Men T er lukket under nødvendighetsregelen. Det følger at
α= LβêT. Dette viser at AxT;(n+1) Inkl T og derfor at T;(n+1) Inkl T. Vi har dermed vist at (1) holder. Dermed har vi også gitt et fullstendig bevis for punkt (a).

Ad (b): Anta for reduktio ad absurdum at T er endelig aksiomatiserbar. Da finnes det en endelig mengde med formler, X= {β;1,..., β;k}, slik at Π(X) =T. Fra definisjonen av Π følger at X Inkl Π(X)=T. Man har derfor {β;1,..., β;k} Inkl T. Dette, og punkt (a), impliserer {β;1,..., β;k} Inkl UN(Mg(T;n: nêN). Fra dette følger at det finnes naturlige tall a;1,...,a;k slik at β;j êT;(a;j) for j=1,...,k. La b være det største av tallene a;1,...,a;k. Nå kan man lett vise

© Morten Harboe Rognes

ved hjelp av Teorem 2.2e at T;m Inkl T;n om m<=n. Det følger at β;jêT;(a;j) Inkl T;b for alle j=1,..,k. Dette innebærer at X Inkl T;b. Men T;b er lukket under modus ponens. Man innser også lett at T;b er lukket under uniform substitusjon. Det følger at Π(X) Inkl T;b. Men T;b er strengt inkludert i T;(b+1) ifølge Teorem 2.2. Da må T;b også være strengt inkludert i T. Det følger at Π(X) SInkl T. Men dette strider åpenbart mot Π(X)=T. Dette viser at T ikke er endelig aksiomatiserbar. **QED**.

§3 Systemene K og KD. Systemsekvensene <K;n>/nêN/ og <KD;n>/nêN/

Vi går nå over til å studere systemene K og KD og de to tilsvarende systemsekvensene <K;n>/nêN/ og <KD;n>/nêN/. De to siste sekvensene er definert på en måte som svarer til definisjonen av <T;n>/nêN/.

La oss først bemerke at K er det setningslogiske modalsystemet hvor aksiomene er alle formlene i mengden PC* U {L(α→β)→Lα→Lβ: α,βêFm(L)} . Slutningsreglene i systemet er modus ponens og nødvendighetsregelen |- α → |-Lα.

Tilsvarende er KD det setningslogiske modalsystemet hvor aksiomene er alle formlene i mengden PC* U{Lα→ ¬L¬α : αêFm(L)}U {L(α→β)→Lα→Lβ: α,βêFm(L)} Slutningsreglene er også i dette systemet bare modus ponens og nødvendighetsregelen: |- α → |-Lα.

Vi definerer så de systemskvensene vi ønsker å studere:

Definisjon 3.2
(a) Definer induktivt en mengde av formler i L slik:
(i) AxK;0 = PC* U {L(α→β)→Lα→Lβ: α,βêFm(L)}
(ii) AxK;(n+1) = AxK;n U {Lα: αêAxK;n}
(b) La K;n (n>=0) være den minste formelmengden som inneholder AxK;n og som er lukket under modus ponens.
(c) Definer induktivt en mengde av formler i L slik:
(i) AxKD;0 = PC* U{Lα→ ¬L¬α : αêFm(L)}U {L(α→β)→Lα→Lβ: α,βêFm(L)}
(ii) AxKD;(n+1) = AxKD;n U {Lα : αêAxKD;n}
(b) La KD;n (n>=0) være den minste formelmengden som inneholder AxKD;n og som er lukket under modus ponens.

For hvert nêN defineres en klasse av halvsyntaktiske modeller av første slag som svarer til systemet K;n. Denne mengden av modeller betegnes med ||K;n||. En modell Mê|K;n| hvis og bare hvis M= <υ,Γ,φ> er en halvsyntaktisk modell av første slag og Γ oppfyller de følgende to krav om n>0: (i) AxK;(n-1) Inkl Γ og (ii) Γ er lukket under modus ponens. Er n=0 krever vi bare at Γ er lukket under modus ponens.

Tilsvarende defineres for hvert nêN en klasse av halvsyntaktiske modeller av første slag som svarer til systemet KD;n. Denne mengden av modeller betegnes med |KD;n|. En modell Mê|KD;n| hvis og bare hvis M= <υ,Γ,φ> er en halvsyntaktisk modell av første slag og Γ oppfyller de følgende krav om n>0: (i) AxKD;(n-1) Inkl Γ og (ii) Γ er lukket under modus ponens. (iii) Er αê Γ så er det ikke slik at (¬α)ê Γ. Er n=0 krever vi bare at Γ er lukket under modus ponens og at kravet (iii) holder.

Man kan vise:

© Morten Harboe Rognes

Teorem 3.1: Er αêFm(L) har man, om n>=0, at
αêK;n ↔ (AM)(Mê|K;n| → π;3(M)(α)=1)

Bevis: Vi tar først for oss gyldighetsdelen. Først viser vi at alle teoremene i K;0 holder i enhver K;0-modell. Dette er opplagt for formlene i PC*. Anta at M=<υ,Γ,φ> en vilkårlig K;0-modell. Vi skal vise at formelen L(α→β)→Lα→Lβ holder i M. Anta φ(L(α→β))=1. Da har vi ved hjelp av definisjonen av φ at (1) (α→β)êΓ. Anta nå at (2) φ(Lα)=1. Da følger (3) αêΓ. Siden Γ er lukket under modus ponens følger fra (1) og (3) at βêΓ. Man har altså at følgende holder: φ(L(α→β))=1 & φ(Lα)=1 → φ(Lβ)=1. Herav følger i lys av definisjonen av φ at φ(L(α→β)→Lα→Lβ)=1. Dette viser at alle aksiomene i K;0 holder i enhver K;0-modell.

Det er også nødvendig å vise at modus ponens bevarer gyldighet. Anta derfor (4) (AM)(Mê|K;0| → π;3(M)(α)=1) og (5) (AM)(Mê|K;0| → π;3(M)(α→β)=1). La M=<υ,Γ,φ> være en vilkårlig K;0-modell. Da har vi ved hjelp av (4) og (5) at φ(α)=1 & φ(α→β)=1. Men fra dette følger φ(β)=1. Det følger at β holder i alle K;0-modeller, med andre ord er β også K;0-gyldig.

La oss så vise at alle teoremene i K;(n+1) holder i enhver modell i |K;(n+1)|, gitt, som induksjonshypotese, at alle teoremer i K;n holder i enhver modell i |K;n| (n>0).

Iakta først at man har: (6) |K;(n+1)| Inkl |K;n|. For anta M=<υ,Γ,φ> er en K;(n+1)-modell. Da har vi pr. definisjon at Γ er lukket under modus ponens og at AxK;n Inkl Γ. Men da må vi, siden AxK;(n-1) Inkl AxK;n , ha at Γ er lukket under modus ponens og at AxK;(n-1) Inkl Γ. Men dette innebærer at M også er en K;n-modell, ie. Mê|K;n|.

For å vise at teoremene i K;(n+1) holder i alle K;(n+1)-modeller er det nødvendig å godtgjøre at alle formlene i AxK;(n+1) holder i alle modeller i |K;(n+1)|. Anta derfor for vilkårlig α at αêAxK;(n+1).

Tilfelle (i): αêAxK;n. Da har vi at αêK;n og derfor etter induksjonshypotesen at α holder i alle modeller i |K;n|. Det følger ved hjelp av (6) at α holder i alle modeller i |K;(n+1)|.

Tilfelle (ii): αê{Lβ: βêAxK;n}. Da har vi (7) α=Lβ & βêAxK;n for en eller annen formel β. La M=<υ,Γ,φ> være en vilkårlig K;(n+1)-modell. Da har vi AxK;n Inkl Γ. Det følger at (8) βêΓ. Da må vi ha φ(Lβ)=1. I lys av (7) følger at φ(α) =1. Men M var en vilkårlig K;(n+1)-modell. Det følger at α også i dette tilfellet holder i alle K;(n+1)-modeller. At modus ponens bevarer K;(n+1) gyldighet bevises på nøyaktig samme måte som ved systemet T;0.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for gyldighetsdelen i satsen. La oss så gi et bevis for fullstendighetsdelen.

Anta nêN og at ¬(αêK;n). Da er {¬α} en K;n-konsistent formelmengde. Denne kan ved hjelp av Lindenbaums lemma utvides til en maksimalt K;n-konsistent mengde Δ. Da har vi naturligvis at (9) (¬α)êΔ. Definer nå K;n-modell M=<υ,Γ,φ> ved å sette:
(10) υ(p) =1 ↔ pêΔ for alle utsagnsvariabler p. Definer videre Γ ved:
(11) Γ = Mg(α: LαêΔ). La endelig φ være valuasjonsfunksjonen av første slag som er assosiert med strukturen <υ,Γ>. Ved et enkelt induksjonsbevis viser man:
(12) (Aβ)(βêFm(L) → (φ(β)=1 ↔ βêΔ)).
Vi utelater detaljene her siden beviset er basert på helt opplagte egenskaper ved maksimalt konsistente mengder, samt egenskaper til funksjonen φ.

Anta n=0. Det eneste vi da behøver å vise er at Γ er lukket under modus ponens. Dette er imidlertid opplagt i lys av det forhold at (L(α→β)→(Lα→Lβ)) er et aksiom i alle systemene i rekken <K;n>/nêN/ og derfor er med i Δ. Det skulle derfor være klart at M er en

© Morten Harboe Rognes

K;n-modell i dette tilfellet. Anta n>0. Da må vi vise at AxK;(n-1) Inkl Γ. Anta derfor for vilkårlig γ at γêAxK;(n-1). Da har vi at Lγ̂êAxK;n Inkl K;n og derfor at Lγ̂êΔ. Dette følger fordi Δ er en maksimalt K;n-konsistent mengde og man derfor må ha at K;n Inkl Δ. Men fra dette og (11) følger γêΓ. Siden γ var en vilkårlig formel har vi derfor vist: AxK;(n-1) Inkl Γ. Vi har dermed vist at (13) Mê|K;n|. Fra (9) og (12) følger at (14) ¬(φ(α)=1). Det følger fra (13) og (14) at (EM)(Mê|K;n| & ¬(π;3(M)(α)=1)). Dette viser at fullstendighetsdelen i teoremet holder. **QED.**

Teorem 3.2:

(a) (Aα)(αêFm(L) →. αêK;n ↔ LαêK;(n+1))
(b) (Aα)(αêFm(L) →. αêK;0 ↔ L(n)(α)êK;n)
(c) (Aα)(αêFm(L) → ¬(L(α→α)êK;0)
(d) (An)(nêN → ¬(L(n+1)(α→α)êK;n)
(e) nêN →K;n SInkl K;(n+1).

Bevis: *Ad (a)*: Kondisjonalen mot høyre er temmelig opplagt: Er αêAxK;n er det åpenbart at LαêAxK;(n+1) Inkl K;(n+1). Anta LαêK;(n+1) & L(α→β)êK;(n+1). Siden L(α→β)→Lα→Lβ er et aksiom i K;(n+1) og K;(n+1) er lukket under modus ponens følger da at LβêK;(n+1). Kondisjonalen mot høyre i (a) følger da ved induksjon på K;n. Når det gjelder kondisjonalen mot venstre går vi frem på følgende måte: Anta ¬(αêK;n). Definer vilkårlig en verditilordning υ inn i {0,1} for utsagnsvariablene i L. Sett (1) Γ =K;n. La φ være valuasjonsfunksjonen av første slag som er assosiert med strukturen <υ,Γ>. Sett M=<υ,Γ,φ>. Da har vi at M er en K;(n+1)-modell fordi Γ er lukket under modus ponens og vi har AxK;n Inkl K;n. Men ¬(αêK;n). Dette impliserer at ¬(αêΓ) og derfor , siden φ(Lα) =1 ↔ (αêΓ), at ¬(φ(Lα)=1). Det følger at (EM)(Mê|K;(n+1)| & ¬(π;3(M)(Lα)=1)). Fra dette og Teorem 3.1 følger ¬(LαêK;(n+1)). Dette viser at (a) holder.

Ad (b): Påstanden bevises ved induksjon på n. For n=0 har man:
αêK;0 ↔ L(0)(α)êK;0 ↔ L(n)(α)êK;n, siden man per definisjon har L(0)(α)=α.
Anta påstanden holder for n, med andre ord at (1) αêK;0 ↔ L(n)(α)êK;n der αêFm(L). Vi skal vise at en holder for n+1: Ved hjelp av det som er bevist under punkt (a) har vi:
(2) L(n)(α) ↔ L(L(n)(α))êK;(n+1). Men L(L(n)(α)) = L(n+1)(α). Fra dette, (1) og (2) følger: αêK;0 ↔ L(n+1)(α)êK;(n+1). Dette viser at påstanden holder for n+1 om den holder for n. Det følger at (b) holder for alle n.

Ad (c): Vi må vise at L(α→α) ikke er noe teorem i K;0. La υ være en vilkårlig tilordning av 0 eller 1 til setningsvariablene. La Γ være den tomme mengden. La φ være den valuasjonsfunksjonen av første slag som er assosiert med modellstrukturen <υ,Γ>. Sett M= <υ,Γ,φ>. Det skulle da være klart at Γ er lukket under modus ponens og at M derfor er en K;0-modell. Men antar man φ(L(α→α))=1 vil (α→α)êΓ. Dette er umulig siden Γ er den tomme mengden. Det følger at ¬(φ(L(α→α))=1). Fra dette og Teorem 3.1 følger at L(α→α) ikke er noe teorem i K;0.

Ad (d): Dette følger fra det vi har vist under (b) og (c). Anta nêN. Fra punkt (b) følger: L(α→α)êK;0 ↔ L(n+1)(α→α)êK;n. Fra (c) har vi ¬(L(α→α)êK;0). Det følger at ¬(L(n+1)(α→α)êK;n) holder for alle n.

Ad (e): Anta nêN. Det må først bevises at (1) K;n Inkl K;(n+1). Vi har imidlertid at AxK;n per definisjon er inkludert i AxK;(n+1) som utgjør aksiomene i K;(n+1). Alle aksiomene i K;n er derfor utledbare i K;(n+1). Siden K;(n+1) er lukket under modus ponens

© Morten Harboe Rognes

følger at (1) holder. I lys av av punkt (b) har vi åpenbart at (2) (α→α)êK;0 ↔ L(n+1) (α→α)êK;(n+1). Siden PC* Inkl K;0. Følger at (α→α)êK;0. Fra dette og (2) kan man slutte: (3) L(n+1)(α→α)êK;(n+1). Fra (d) følger imidlertid (4) ¬(L(n+1)(α→α)êK;n). Fra (1), (3) og (4) følger: K;n SInkl K;(n+1). Dette viser at (e) holder. **QED**.

Teorem 3.3: Er αêFm(L) har man, om n>=0, at
αêKD;n ↔ (AM)(Mê|KD;n| → π;3(M)(α)=1)

Bevis: Vi tar først for oss gyldighetsdelen. Først viser vi at alle teoremene i KD;0 holder i enhver KD;0-modell. Dette er opplagt for formlene i PC*. Vi må imidlertid vise at det også holder for alle aksiomene av formen Lα→¬L¬α. M=<υ,Γ,φ> en vilkårlig KD;0-modell og at φ(Lα)=1. Da har vi fra definisjonen av φ at αêΓ. Siden M er en KD;0-modell må da ¬((¬α)êΓ). Fra dette følger så at φ(¬L¬α)=1. Anta at M=<υ,Γ,φ> en vilkårlig KD;0-modell. Vi skal vise at formelen L(α→β)→Lα→Lβ holder i M. Anta φ(L(α→β))=1. Da har vi ved hjelp av definisjonen av φ at (1) (α→β)êΓ. Anta nå at (2) φ(Lα)=1. Da følger (3) αêΓ. Siden Γ er lukket under modus ponens følger fra (1) og (3) at βêΓ. Man har altså at følgende holder: φ(L(α→β))=1 & φ(Lα)=1 → φ(Lβ)=1. Herav følger i lys av definisjonen av φ at φ(L(α→β)→Lα→Lβ)=1. Dette viser at alle aksiomene i KD;0 holder i enhver KD;0-modell.

Det er også nødvendig å vise at modus ponens bevarer gyldighet. Anta derfor (4) (AM)(Mê|KD;0| → π;3(M)(α)=1) og (5) (AM)(Mê|KD;0| → π;3(M)(α→β)=1). La M=<υ,Γ,φ> være en vilkårlig KD;0-modell. Da har vi ved hjelp av (4) og (5) at φ(α)=1 & φ(α→β)=1. Men fra dette følger φ(β)=1. Det følger at β holder i alle KD;0-modeller, med andre ord er β også KD;0-gyldig.

La oss så vise at alle teoremene i KD;(n+1) holder i enhver modell i |KD;(n+1)|, gitt, som induksjonshypotese, at alle teoremer i KD;n holder i enhver modell i |KD;n| (n>0).

Iakta først at man har: (6) |KD;(n+1)| Inkl |KD;n|. For anta M=<υ,Γ,φ> er en KD;(n+1)-modell. Da har vi pr. definisjon at Γ er lukket under modus ponens og at AxKD;n Inkl Γ. I tillegg må vi ha at Γ er konsistent ie. at

(+) (Aα)(αêFm(L) &αêΓ →¬((¬α)êΓ).

Men da må vi, siden AxKD;(n-1) Inkl AxKD;n , ha at Γ er lukket under modus ponens, oppfyller kravet (+) og at AxKD;(n-1) Inkl Γ. Men dette innebærer at M også er en KD;n-modell, ie. Mê|KD;n|.

For å vise at teoremene i KD;(n+1) holder i alle KD;(n+1)-modeller er det nødvendig å godtgjøre at alle formlene i AxKD;(n+1) holder i alle modeller i |KD;(n+1)|. Anta derfor for vilkårlig α at αêAxKD;(n+1).

Tilfelle (i): αêAxKD;n. Da har vi at αêKD;n og derfor etter induksjonshypotesen at α holder i alle modeller i |KD;n|. Det følger ved hjelp av (6) at α holder i alle modeller i |KD;(n+1)|.

Tilfelle (ii): αê{Lβ: βêAxKD;n}. Da har vi (7) α=Lβ & βêAxKD;n for en eller annen formel β. La M=<υ,Γ,φ> være en vilkårlig KD;(n+1)-modell. Da har vi AxKD;n Inkl Γ. Det følger at (8) βêΓ. Da må vi ha φ(Lβ)=1. I lys av (7) følger at φ(α) =1. Men M var en vilkårlig KD;(n+1)-modell. Det følger at α også i dette tilfellet holder i alle KD;(n+1)-modeller. At modus ponens bevarer KD;(n+1) gyldighet bevises på nøyaktig samme måte som ved systemet T;0.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for gyldighetsdelen i satsen. La oss så gi et bevis for fullstendighetsdelen.

Anta nêN og at ¬(αêKD;n). Da er {¬α} en KD;n-konsistent formelmengde. Denne

© Morten Harboe Rognes

kan ved hjelp av Lindenbaums lemma utvides til en maksimalt KD;n-konsistent mengde Δ. Da har vi naturligvis at (9) (¬α)êΔ. Definer nå KD;n-modell M=<υ,Γ,φ> ved å sette: (10) υ(p) =1 ↔ pêΔ for alle utsagnsvariabler p. Definer videre Γ ved: (11) Γ = Mg(α: LαêΔ). La endelig φ være valuasjonsfunksjonen av første slag som er assosiert med strukturen <υ,Γ>. Ved et enkelt induksjonsbevis viser man:

(12) (Aβ)(βêFm(L) → (φ(β)=1 ↔ βêΔ)).

Vi utelater detaljene her siden beviset er basert på helt opplagte egenskaper ved maksimalt konsistente mengder, samt egenskaper til funksjonen φ.

Anta n=0. Det eneste vi da behøver å vise er at Γ er lukket under modus ponens og oppfyller kravet (+) ovenfor. Dette er imidlertid opplagt i lys av det forhold at (L(α→β)→(Lα→Lβ)) og Lα→¬L¬α er aksiomer i alle systemene i rekken <KD;n>/nêN/ og derfor er med i Δ. Det skulle derfor være klart at M er en KD;n-modell i dette tilfellet. Anta n>0. Da må vi vise at AxKD;(n-1) Inkl Γ. Anta derfor for vilkårlig γ at γêAxKD;(n-1). Da har vi at LγêAxKD;n Inkl KD;n og derfor at LγêΔ. Dette følger fordi Δ er en maksimalt KD;n-konsistent mengde og man derfor må ha at KD;n Inkl Δ. Men fra dette og (11) følger γêΓ. Siden γ var en vilkårlig formel har vi derfor vist: AxKD;(n-1) Inkl Γ. Vi har dermed vist at (13) Mê|KD;n|. Fra (9) og (12) følger at (14) ¬(φ(α)=1). Det følger fra (13) og (14) at (EM)(Mê|KD;n| & ¬(π;3(M)(α)=1)). Dette viser at fullstendighetsdelen i teoremet holder. **QED.**

Teorem 3.4:

(a) (Aα)(αêFm(L) →. αêKD;n ↔ LαêKD;(n+1))
(b) (Aα)(αêFm(L) →. αêKD;0 ↔ L(n)(α)êKD;n)
(c) (Aα)(αêFm(L) → ¬(L(α→α)êKD;0)
(d) (An)(nêN → ¬(L(n+1)(α→α)êKD;n)
(e) nêN →KD;n SInkl KD;(n+1).

Bevis: *Ad (a)*: Kondisjonalen mot høyre er temmelig opplagt: Er αêAxKD;n er det åpenbart at LαêAxKD;(n+1) Inkl KD;(n+1). Anta LαêKD;(n+1) & L(α→β)êKD;(n+1). Siden L(α→β)→Lα→Lβ er et aksiom i KD;(n+1) og KD;(n+1) er lukket under modus ponens følger da at LβêKD;(n+1). Kondisjonalen mot høyre i (a) følger da ved induksjon på KD;n. Når det gjelder kondisjonalen mot venstre går vi frem på følgende måte: Anta ¬(αêKD;n). Definer vilkårlig en verditilordning υ inn i {0,1} for utsagnsvariablene i L. Sett (1) Γ =KD;n. La φ være valuasjonsfunksjonen av første slag som er assosiert med strukturen <υ,Γ>. Sett M=<υ,Γ,φ>. Da har vi at M er en KD;(n+1)-modell fordi Γ er lukket under modus ponens og vi har AxKD;n Inkl KD;n. Men ¬(αêKD;n). Dette impliserer at ¬(αêΓ) og derfor , siden φ(Lα) =1 ↔ (αêΓ), at ¬(φ(Lα)=1). Det følger at (EM)(Mê|KD;(n+1)| & ¬(π;3(M)(Lα)=1)). Fra dette og Teorem 3.1 følger ¬(LαêKD;(n+1)). Dette viser at (a) holder.

Ad (b): Påstanden bevises ved induksjon på n. For n=0 har man: αêKD;0 ↔ L(0)(α)êKD;0 ↔ L(n)(α)êKD;n, siden man per definisjon har L(0)(α)=α. Anta påstanden holder for n, med andre ord at (1) αêKD;0 ↔ L(n)(α)êKD;n der αêFm(L). Vi skal vise at en holder for n+1: Ved hjelp av det som er bevist under punkt (a) har vi: (2) L(n)(α) ↔ L(L(n)(α))êKD;(n+1). Men L(L(n)(α)) = L(n+1)(α). Fra dette, (1) og (2) følger: αêKD;0 ↔ L(n+1)(α)êKD;(n+1). Dette viser at påstanden holder for n+1 om den holder for n. Det følger at (b) holder for alle n.

Ad (c): Vi må vise at L(α→α) ikke er noe teorem i KD;0. La υ være en vilkårlig tilordning av 0 eller 1 til setningsvariablene. La Γ være den tomme mengden. La φ være den

© Morten Harboe Rognes

valuasjonsfunksjonen av første slag som er assosiert med modellstrukturen <υ,Γ>. Sett M= <υ,Γ,φ>. Det skulle da være klart at Γ er lukket under modus ponens og at M derfor er en KD;0-modell. Men antar man φ(L(α→α))=1 vil (α→α)êΓ. Dette er umulig siden Γ er den tomme mengden. Det følger at ¬(φ(L(α→α))=1). Fra dette og Teorem 3.1 følger at L(α→α) ikke er noe teorem i KD;0.

Ad (d): Dette følger fra det vi har vist under (b) og (c). Anta nêN. Fra punkt (b) følger: L(α→α)êKD;0 ↔ L(n+1)(α→α)êKD;n. Fra (c) har vi ¬(L(α→α)êKD;0). Det følger at ¬(L(n+1)(α→α)êKD;n) holder for alle n.

Ad (e): Anta nêN. Det må først bevises at (1) KD;n Inkl KD;(n+1). Vi har imidlertid at AxKD;n per definisjon er inkludert i AxKD;(n+1) som utgjør aksiomene i KD;(n+1). Alle aksiomene i KD;n er derfor utledbare i KD;(n+1). Siden KD;(n+1) er lukket under modus ponens følger at (1) holder. I lys av av punkt (b) har vi åpenbart at (2) (α→α)êKD;0 ↔ L(n+1)(α→α)êKD;(n+1). Siden PC* Inkl KD;0. Følger at (α→α)êKD;0. Fra dette og (2) kan man slutte: (3) L(n+1)(α→α)êKD;(n+1). Fra (d) følger imidlertid (4) ¬(L(n+1) (α→α)êKD;n). Fra (1), (3) og (4) følger: KD;n SInkl KD;(n+1). Dette viser at (e) holder. **QED**.

Teorem 3.5: (Hovedresultat II) Man har:

(a) K= UN(Mg(K;n: nêN))
(b) K er ikke et endelig aksiomatiserbart system
(c) KD= UN(Mg(KD;n: nêN))
(d) KD er ikke et endelig aksiomatiserbart system

Ad (a): For å vise at K Inkl UN(Mg(K;n: nêN)) må vi først vise at aksiomene i K, AxK;0 er inkludert i UN(Mg(K;n: nêN)). Men dette er opplagt siden AxK;0 Inkl K;0 og K;0 er åpenbart inkludert i UN(Mg(K;n: nêN)). I tillegg er det nødvendig å vise at UN(Mg(K;n: nêN)) er lukket under modus ponens og nødvendighetsregelen. Anta α,α→βêUN(Mg(K;n: nêN)). Da har vi at det finnes m,nêN slik at αêK;n & (α→β)êK;m. La j være det største av tallene m og n. Siden K;j Inkl K;k om j<=k, dette viser man lett ved hjelp av Teorem 3.2e, følger at α, α→βêK;j. Men K;j er lukket under modus ponens. Derfor har vi βêK;j Inkl UN(Mg(K;n: nêN)).

Anta αêUN(Mg(K;n: nêN)). Da har vi αêK;n for noe n. Ved hjelp av Teorem 3.2a følger da at LαêK;(n+1) Inkl UN(Mg(K;n: nêN)). Dette viser at UN(Mg(K;n: nêN)) er lukket under nødvendighetsregelen.

La oss så vise at UN(Mg(K;n: nêN)) Inkl K. Det vil da åpenbart være tilstrekkelig å bevise: (1) (An)(nêN → K;n Inkl K). Dette vises ved induksjon på n. Basistrinn: n=0. Vi må da vise at K;0 Inkl K. Siden K er lukket under modus ponens er det nok å vise at AxK;0 Inkl K. Men dette følger direkte fra definisjonen av K. Induksjonstrinn: Anta som induksjonshypotese at K;n Inkl K. For å vise at K;(n+1) Inkl K vil det være nok å vise at AxK;(n+1) Inkl K. Anta derfor for vilkårlig α at αêAxK;(n+1). Da har vi ifølge definisjonen av AxK;(n+1) at αêAxK;n eller at α= Lβ for en eller annen formel βêAxK;n. Tilfelle (i): αêAxK;n. Da er αêK;n som etter induksjonshypotesen er inkludert i K. Tilfelle (ii) α=Lβ & βêAxK;n. Da er βêK;n og derfor har vi etter induksjonshypotesen at βêK. Men K er lukket under nødvendighetsregelen. Det følger at
α= LβêK. Dette viser at AxK;(n+1) Inkl K og derfor at K;(n+1) Inkl K. Vi har dermed vist at (1) holder. Dermed har vi også gitt et fullstendig bevis for punkt (a).

Ad (b): Anta for reduktio ad absurdum at K er endelig aksiomatiserbar. Da finnes det en endelig mengde med formler, X= {β;1,..., β;k}, slik at Π(X) =K. Fra definisjonen av Π

© Morten Harboe Rognes

følger at X Inkl Π(X)=K. Man har derfor {β;1,..., β;k} Inkl K. Dette, og punkt (a), impliserer {β;1,..., β;k} Inkl UN(Mg(K;n: nêN). Fra dette følger at det finnes naturlige tall a;1,...,a;k slik at β;j êK;(a;j) for j=1,...,k. La b være det største av tallene a;1,...,a;k. Nå kan man lett vise ved hjelp av Teorem 2.2e at K;m Inkl K;n om m<=n. Det følger at β;jêK;(a;j) Inkl K;b for alle j=1,..,k. Dette innebærer at X Inkl K;b. Men K;b er lukket under modus ponens. Man innser også lett at K;b er lukket under uniform substitusjon. Det følger at Π(X) Inkl K;b. Men K;b er strengt inkludert i K;(b+1) ifølge Teorem 2.2. Da må K;b også være strengt inkludert i K. Det følger at Π(X) SInkl K. Men dette strider åpenbart mot Π(X)=K. Dette viser at K ikke er endelig aksiomatiserbar.

Ad (c): For å vise at KD Inkl UN(Mg(KD;n: nêN)) må vi først vise at aksiomene i KD, AxKD;0 er inkludert i UN(Mg(KD;n: nêN)). Men dette er opplagt siden AxKD;0 Inkl KD;0 og KD;0 er åpenbart inkludert i UN(Mg(KD;n: nêN)). I tillegg er det nødvendig å vise at UN(Mg(KD;n: nêN)) er lukket under modus ponens og nødvendighetsregelen. Anta α,α→βêUN(Mg(KD;n: nêN)). Da har vi at det finnes m,nêN slik at αêKD;n & (α→β)êKD;m. La j være det største av tallene m og n. Siden KD;j Inkl KD;k om j<=k, dette viser man lett ved hjelp av Teorem 3.2e, følger at α, α→βêKD;j. Men KD;j er lukket under modus ponens. Derfor har vi βêKD;j Inkl UN(Mg(KD;n: nêN)).

Anta αêUN(Mg(KD;n: nêN)). Da har vi αêKD;n for noe n. Ved hjelp av Teorem 3.2a følger da at LαêKD;(n+1) Inkl UN(Mg(KD;n: nêN)). Dette viser at UN(Mg(KD;n: nêN)) er lukket under nødvendighetsregelen.

La oss så vise at UN(Mg(KD;n: nêN)) Inkl KD. Det vil da åpenbart være tilstrekkelig å bevise: (1) (An)(nêN → KD;n Inkl KD). Dette vises ved induksjon på n. Basistrinn: n=0. Vi må da vise at KD;0 Inkl KD. Siden KD er lukket under modus ponens er det nok å vise at AxKD;0 Inkl KD. Men dette følger direkte fra definisjonen av KD. Induksjonstrinn: Anta som induksjonshypotese at KD;n Inkl KD. For å vise at KD;(n+1) Inkl KD vil det være nok å vise at AxKD;(n+1) Inkl KD. Anta derfor for vilkårlig α at αêAxKD;(n+1). Da har vi ifølge definisjonen av AxKD;(n+1) at αêAxKD;n eller at α= Lβ for en eller annen formel βêAxKD;n. Tilfelle (i): αêAxKD;n. Da er αêKD;n som etter induksjonshypotesen er inkludert i KD. Tilfelle (ii) α=Lβ & βêAxKD;n. Da er βêKD;n og derfor har vi etter induksjonshypotesen at βêKD. Men KD er lukket under nødvendighetsregelen. Det følger at α= LβêKD. Dette viser at AxKD;(n+1) Inkl KD og derfor at KD;(n+1) Inkl KD. Vi har dermed vist at (1) holder. Dermed har vi også gitt et fullstendig bevis for punkt (a).

Ad (d): Anta for reduktio ad absurdum at KD er endelig aksiomatiserbar. Da finnes det en endelig mengde med formler, X= {β;1,..., β;k}, slik at Π(X) =KD. Fra definisjonen av Π følger at X Inkl Π(X)=KD. Man har derfor {β;1,..., β;k} Inkl KD. Dette, og punkt (a), impliserer {β;1,..., β;k} Inkl UN(Mg(KD;n: nêN). Fra dette følger at det finnes naturlige tall a;1,...,a;k slik at β;j êKD;(a;j) for j=1,...,k. La b være det største av tallene a;1,...,a;k. Nå kan man lett vise ved hjelp av Teorem 2.2e at KD;m Inkl KD;n om m<=n. Det følger at β;jêKD;(a;j) Inkl KD;b for alle j=1,..,k. Dette innebærer at X Inkl KD;b. Men KD;b er lukket under modus ponens. Man innser også lett at KD;b er lukket under uniform substitusjon. Det følger at Π(X) Inkl KD;b. Men KD;b er strengt inkludert i KD;(b+1) ifølge Teorem 3.4. Da må KD;b også være strengt inkludert i KD. Det følger at Π(X) SInkl KD. Men dette strider åpenbart mot Π(X)=KD. Dette viser at KD ikke er endelig aksiomatiserbar.

© Morten Harboe Rognes

§4 Systemene E2, S2 og <S2;m>/mêN/. Systemsekvensen <S(n,m)>/<n,m>êNxN/

Vi skal først induktivt definere visse formelmengder:

Definisjon 4.1
(i) k(0) = PC* U Mg(Lα→α: αêFm(L)) U Mg(L(α→β)→Lα→Lβ: α,βêFm(L))
(ii) k(n+1) = k(n)U Mg(Lβ→Lα: αêk;n & βêFm(L))

I det følgende skal vi bruke "L;mp(Δ)" som forkortelse for "Formelmengden Δ er lukket under modus ponens".

Definisjon 4.2
(i) K(n,m) = k(n) U Mg(L(k)(α→α): k=<m & αêFm(L)) (n,mêN)

Man ser lett fra denne definisjonen at K(n,0) = k;n siden L(0)(α→α)=(α→α). Fordi (α→α)êPC* følger det at (α→α)êk;0 Inkl k;n for alle nêN.

Definisjon 4.3
(i) S(n,m) = SN(Mg(X: X Inkl Fm(L) & K(n,m) Inkl X & L;mp(X)) (m,n>=0)

Definisjon 4.4
(i) Anta X Inkl Fm(L). Da er K(X) den minste formelmengden inkludert i Fm(L) somm inneholder X og som er slik at (Lγ→Lα)êX om γêFm(L) og αêX
(ii) E2 er den minste X formelmengden inkludert i L som er lukket under modus ponens og som inneholder K(k(0))
(iii) S2 er den minste X formelmengden inkludert i L som er lukket under modus ponens og som inneholder K(k(0))U Mg(L(α→α): αêFm(L))
(iv) S2(m) er den minste X formelmengden inkludert i L som er lukket under modus ponens og som inneholder K(k(0))U Mg(L(m)(α→α): αêFm(L))

Teorem 4.1 Man har:
(a) (An)(nêN → k(n) Inkl k(n+1))
(b) (An)(Am)(n,mêN & m=<n → k(m) Inkl k(n))
(c) (An)(nêN → K(n,m) Inkl K(n+1,m))
(d) (Aj)Ak)(j,kêN & j=<k → K(j,m) Inkl K(k,m))
(e) (An)(nêN → S(n,m) Inkl S(n+1,m))
(f) (Aj)Ak)(j,kêN & j=<k → S(j,m) Inkl S(k,m))
(g) (Am)(mêN → S(n,m) Inkl S(n,m+1))
(h) (Ar)(As)(r,sêN & r=<s → S(n,r) Inkl S(n,s))

Bevis:
Ad (a): Anta nêN. Fra Definisjon 4.1 har vi da:
k(n+1) = k(n) U Mg(Lβ→Lα: αêk;n & βêFm(L)). Det følger da at k(n) Inkl k(n+1).
Ad (b): Vi skal vise (An)(nêN → (Am)(mêN & m=<n → k(m) Inkl k(n))). Dette gjøres ved induksjon på n. Er n=0 holder påstanden trivielt siden vi har k(0) Inkl k(0). Anta (Am)(mêN & m=<n → k(m) Inkl k(n)). Da har vi (Am)(mêN & m=<n+1 → k(m) Inkl k(n+1)) ved hjelp av det som ble vist under punkt (a).

© Morten Harboe Rognes

Ad (c): Anta nêN. Fra Definisjon 4.2 har vi
K(n,m) = k;n U Mg(L(k)(α→α): k=< m & αêFm(L)) og derfor K(n+1,m) = k(n+1) U Mg(L(k)(α→α): k=< m & αêFm(L)). Men da følger K(n,m) Inkl K(n+1,m) ved hjelp av resultatet som ble vist under punkt (a).

Ad (d): Vi må bevise: (Ak)(kêN → (Aj)(jêN & j=<k → K(j,m) Inkl K(k,m))). Dette vises ved induksjon. For n=0 holder satsen trivielt. Anta den holder for k. Med andre ord anta at (Aj)(jêN & j=<k → K(j,m) Inkl K(k,m)). Ved hjelp av det vi viste under punkt (c) har man da: (Aj)(jêN & j=<k+1 → K(j,m) Inkl K(k+1,m)). Dette viser at påstanden holder.

Ad (e): Anta nêN. Fra definisjonen av S(n,m) har vi:
S(n,m) = SN(Mg(X: X Inkl Fm(L) & K(n,m) Inkl X & L;mp(X)). Siden
K(n,m) Inkl K(n+1,m) følger umiddelbart fra dette at S(n,m) Inkl S(n+1,m).

Ad (f): Vi må bevise: (Ak)(kêN → (Aj)(jêN & j=<k → S(j,m) Inkl S(k,m))). Dette vises ved induksjon. For n=0 holder satsen trivielt. Anta den holder for k. Med andre ord anta at (Aj)(jêN & j=<k → S(j,m) Inkl S(k,m)). Ved hjelp av det vi viste under punkt (c) har man da: (Aj)(jêN & j=<k+1 → S(j,m) Inkl S(k+1,m)). Dette viser at påstanden holder.

Ad (g): Fra definisjonen av S(n,m) har vi:
(1) S(n,m+1) = SN(Mg(X: X Inkl Fm(L) & K(n,m+1) Inkl X & L;mp(X)). Nå har vi ifølge definisjonen av K(n,m) at K(n,m+1) = k(n) U Mg(L(m+1)(α→α): αêFm(L)). Siden Lα→α er med i K(n,m) for alle n,mêN følger det K(n,m) Inkl S(n,m+1). Herav følger så at
S(n,m) Inkl S(n,m+1).

Ad (h): Vi skal vise: (As)(sêN →(Ar)(rêN & r=<s → S(n,r) Inkl S(n,s))). Dette gjøres ved induksjon på s på nøyaktig samme måte som under punkt (f). **QED**.

Teorem 4.2 Man har:

(a) K(n,m) = UN/j,0,n/(k(j)) U Mg(L(k)(α→α): k=< m & αêFm(L))
(b) UN/j,0,∞/K(j,m) = UN/j,0,∞/(k(j)) U Mg(L(k)(α→α): k=< m& αêFm(L))
(c) K(k(0)) = UN/j,0,∞/(k(j))
(d) UN/j,0,∞/(K(j,m)) = K(k(0)) U Mg(L(k)(α→α): k=< m& αêFm(L))
(e) UN/n,0,∞/(S(n,m)) =
SN(Mg(X: X Inkl Fm(L) & L;mp(X) &
K(k(0)) U Mg(L(k)(α→α): k=< m& αêFm(L)) Inkl X))
(f) E2 = UN/n,0,∞/(S(n,0))
(g) S2 = UN/n,0,∞/(S(n,1))
(h) S2(m) = UN/n,0,∞/(S(n,m))

Bevis: *Ad (a)*: Vi tar første for oss inklusjonen mot høyre: Anta αêK(n,m). I lys av definisjonen av K(n,m) er da det rimelig å skille mellom to tilfelle:

Tilfelle (i): αêk(n). Da har vi αêUN/j,0,n/(k(j)) og derfor
αê UN/j,0,n/(k(j)) U Mg(L(k)(α→α): k=< m & αêFm(L)).

Tilfelle (ii). Det finnes βêFm(L) slik at α= L(k)(β→β) der k=<m. Da har vi åpenbart αê Mg(L(k)(α→α): k=< m &αêFm(L)) og derfor:

αê UN/j,0,n/(k(j)) U Mg(L(m)(α→α): αêFm(L)).

Vi beviser så inklusjonen mot venstre: Anta på den annen side:
αê UN/j,0,n/(k(j)) U Mg(L(k)(α→α): k=< m& αêFm(L)). Igjen ser i på to tilfelle:

Tilfelle (i): αê UN/j,0,n/(k(j)). Da har vi αêk(m) for noe m der m=< n. Men ved hjelp av Teorem 4.1 har vi da k(m) Inkl k(n) Inkl K(n,m).

Tilfelle (ii): αêMg(L(k)(α→α): k=< m &αêFm(L)). Da følger det umiddelbart ved hjelp av definisjonen av K(n,m) at αêK(n,m).

© Morten Harboe Rognes

Ad (b): Vi viser først at inklusjonen mot høyre holder: Anta αêUN/j,0,∞/K(j,m). Da har vi αêK(j,m) for noe jêN. Det følger da ved hjelp av punkt (a) at αê UN/j,0,n/(k(j)) U Mg(L(k)(α→α): k=< m & αêFm(L)). Tilfelle (i): αê UN/j,0,n/(k(j)). Da følger umiddelbart at αêUN/j,0,∞/(k(j)) og derfor αêUN/j,0,∞/(k(j)) U Mg(L(k)(α→α): k=< m & αêFm(L)). Tilfelle (ii): αêMg(L(k)(α→α): k=< m & αêFm(L)). Da har vi selvfølgelig også αêUN/j,0,∞/(k(j)) U Mg(L(k)(α→α): k=< m αêFm(L)).

Dernest viser vi inklusjonen mot venstre:
Anta αêUN/j,0,∞/(k(j)) U Mg(L(k)(α→α): k=< m& αêFm(L)). Igjen er det hensiktsmessig å skille mellom to tilfeller.

Tilfelle (i): αêUN/j,0,∞/(k(j)). Da har vi αêk(j) for noe jêN. I så fall følger det at αêUN/r,0,j/(k(r)) som i lys av punkt (a) er inkludert i K(j,m). Men

K(j,m) Inkl UN/j,0,∞/(K(j,m)). Derfor αêUN/j,0,∞/(K(j,m)).

Tilfelle (ii): αêMg(L(k)(α→α): k=< m & αêFm(L)). Da har vi trivielt ved hjelp av punkt (a) at αêK(n,m) Inkl UN/j,0,∞/(K(j,m)). Dette viser at (b) holder.

Ad (c): Vi skal vise K(k(0)) = UN/j,0,∞/(k(j)). Inklusjonen mot høyre: Det er åpenbart at k(0) Inkl UN/j,0,∞/(k(j)). Anta αêUN/j,0,∞/(k(j)). Da har vi αêk(q) for noe qêN. Ved hjelp av Definisjon 4.1 følger da (Lγ→Lα)êk(q+1) Inkl UN/j,0,∞/(k(j)) for enhver formel γ. Fra disse to forhold følger ved induksjon på K(k(0)) at inklusjnen mot høyre holder.

Inklusjonen mot venstre: Det vil være nok å vise at k(n) Inkl K(k(0)) for alle nêN. Dette gjøres ved induksjon på n. Det er åpenbart at k(0) Inkl K(k(0)).
Anta (1) k(n) Inkl K(k(0)). Vi skal vise at k(n+1) Inkl K(k(0)). Anta αêk(n+1). Da har vi enten at αêk(n) og i så fall følger ved hjelp av (1) at αêK(k(0)). Eller så er α=(Lδ→Lβ) der βêk(n). Etter induksjonshypotesen er da βêK(k(0)). Fra definisjonen av K(k(0)) følger da at α=(Lδ→Lβ)êK(k(0)). Dette viser at punkt (c) holder.

Ad (d): Denne påstanden følger umiddelbart fra punkt (b) og (c).

Ad (e): Vi må vise følgende:

(1) UN/n,0,∞/(S(n,m)) =

SN(Mg(X: X Inkl Fm(L) & L;mp(X) &
K(k(0)) U Mg(L(k)(α→α): k=< m& αêFm(L)) Inkl X))

Man ser at høyre side her er den minste formelmengden som inneholder K(k(0)) pluss alle formler av typen L(k)(α→α) for k=< m &αêFm(L) og som er lukket under modus ponens. La oss akkurat i dette avsnittet forkorte denne høyresiden med Q(m). Vi skal altså vise:

(2) UN/n,0,∞/(S(n,m)) = Q(m)

Vi tar først for oss inklusjonen mot høyre. Det vil være tilstrekkelig vis at S(n,m) Inkl Q(m) for alle nêN. Anta derfor nêN. Vi skal vise (3) S(n,m) Inkl Q(m). Nå er S(n,m) den minste formelmengden som inneholder K(n,m) og som er lukket under modus ponens. Siden Q(m) er lukket under modus ponens vil det derfor være tilstrekkelig å vise at K(n,m) Inkl Q(m). Fra definisjonen av Q(m) fremgår det at

K(k(0)) U Mg(L(k)(α→α): k=< m& αêFm(L)) Inkl Q(m).

Men ved hjelp av det vi viste under (d) følger da:

K(n,m) Inkl UN/j,0,∞/(K(j,m)) =
K(k(0)) U Mg(L(k)(α→α): k=< m& αêFm(L)) Inkl Q(m).

Dette viser at inklusjonen mot høyre holder.

Inklusjonen mot venstre: Vi må vise at Q(m) Inkl UN/n,0,∞/(S(n,m)). Det vil være nok å vise at følgend to ting holder:

(4) K(k(0)) U Mg(L(k)(α→α): k=< m αêFm(L)) Inkl UN/n,0,∞/(S(n,m))

(5) UN/n,0,∞/(S(n,m)) er lukket under modus ponens.

Vi viser først (4). Vi har i lys av definisjonene av K(n,m) og S(n,m), ie. Definisjon 4.2 og

© Morten Harboe Rognes

Definisjon 4.3, at

(6) Mg(L(k)(α→α): k=< m& αêFm(L)) Inkl
K(n,m) Inkl S(n,m) Inkl UN/n,0,∞/(S(n,m)).

For å vise (4) vil det derfor være tilstrekkelig å bevise: (7) K(k(0)) Inkl UN/n,0,∞/(S(n,m)). Anta derfor for vilkårlig α at αêK(k(0)). Ved hjelp av punkt (d) har vi da at αêK(j,m) for noe jêN. Men K(j,m) Inkl S(j,m) Inkl UN/j,0,∞/(S(j,m)). Dette viser at (7) holder. Fra (6) og (7) kan vi slutte at (4) holder.

Det gjenstår bare å vise (5), med andre ord at UN/j,0,∞/(S(j,m)) er lukket under modus ponens. Anta (8) αê UN/j,0,∞/(S(j,m)) & (α→β)êUN/j,0,∞/(S(j,m)). Det finnes da k,r slik at k,rêN & αêS(k,m) & (α→β)êS(r,m). La q være det største av disse to tallene r og k. Da har vi ved hjelp av Teorem 4.1h at αêS(q,m) & (α→β)êS(q,m). Men S(q,m) er den minste formelmengden som innehlder K(q,m) og som er lukket under modus ponens. Det følger at βêS(q,m) og derfor at βêU/j,0,∞/(S(j,m)). Dermed har vi levert et fullstendig bevis for punkt (e).

Ad (f): Vi skal vise E2 = UN/n,0,∞/(S(n,0)). Nå har vi etter definisjonen av E2 gitt i Kripke [2] at E2 = SN(Mg(X: X Inkl Fm(L) & L;mp(X) &
K(k(0)) U Mg(L(0)(α→α): αêFm(L)) Inkl X))

Påstanden følger derfor fra dette og punkt (e).

Ad (g): Det må bevises at S2 = UN/n,0,∞/(S(n,1)). Nå er E2 den minste mengden som er lukket under modus ponens og som inneholder K(k(0)) U Mg(L(α→α): αêFm(L)). Fra dette og det som ble bevist under punkt (e) følger påstanden.

Ad (h): Endelig må vi vise at S2(m) = UN/n,0,∞/(S(n,m)) Men S2(m) er definert som den minste formelmengden i L som innholder K(k(0)) U Mg(L(k)(α→α): k=< m& αêFm(L)) og som er lukket under modus ponens. Fra dette og resultatet under punkt (e) følger det vi ønsker.

Vi har dermed levert et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Vi skal definere de modellene det skal arbeides med i forbindelse med systemene vi har introdusert ovenfor.

Definisjon 4.4

(a) En S(0,m)-modell M for L er en halvsyntaktisk modell M= <υ,Γ,φ> av annet slag som oppfyller de følgende betingelser: (i) Γ er lukket under modus ponens (ii) Er m>0 har man at L(k)(α→α)êΓ for alle αêΓ dersom 0=<k<m

(b) En S(n+1,m)-modell M for L er en halvsyntaktisk modell M= <υ,Γ,φ> av annet slag som oppfyller de følgende betingelser: (i) Γ er lukket under modus ponens
(ii) Er m>0 har vi at K(n,m-1) Inkl Γ. (iii) Er m=0 &Γ≠ø → K(n,m) Inkl Γ.

(c) Mengden av alle S(n,m)-modeller for L betegnes med || S(n,m)||. En formel α i L sies å være S(n,m)-gyldig hvis og bare hvis (AM)(Mê||S(n,m)|| → π;3(M)(α)=1) [2]

I forbindelse med denne definisjonen bemerker vi at følgende to påstander holder:

(a) Enhver S(n+1,m)-modell er en S(n,m)-modell. (n,m>=0)
(b) Enhver S(n,m+1)-modell er en S(n,m)-modell. (n,m>=0)

La oss først vise hvorfor (a) holder: Anta M= <υ,Γ,φ> er en S(n+1,m) modell. Da har man fra

2 Vi minner om at dersom x=<a;1,....,a;n> er et n-tuple betegner π;j(x) den j'te komponenten i dette tuplet. Vi har altså π;j(x)=a;j for j=1 ... n.

© Morten Harboe Rognes

definisjonen ovenfor at den oppfyller de følgende krav: (i) Γ er lukket under modus ponens. (ii) Er m>0 har man at K(n,m-1) Inkl Γ (iii) Er m=0 &Γ≠ø → K(n,m) Inkl Γ. Men siden K(n-1,m-1) Inkl K(n,m-1) når m>0 og K(n-1,m) Inkl K(n,m) om m=0 følger det at M også oppfyller kravene til en S(n,m)-modell.

La oss dernest vise hvorfor (b) holder: Anta M=<υ,Γ,φ> er en S(n,m+1) modell. Det kan være hensiktsmessig å skille mellom to tilfelle:

Tilfelle (1): n=0. Da har vi at M oppfyller de følgende krav: (i) Γ er lukket under modus ponens (ii) Er m+1>0 har man at L(k)(α→α)êΓ for alle αêΓ dersom 0=<k<m+1. Er da m>0 og 0=<k<m har man da selvfølgelig at m+1>0 og 0=<k<m+1 og derfor at L(k)(α→α)êΓ for alle formler α. M oppfyller derfor også kravene til en S(n,m)-modell i dette tilfellet.

Tilfelle (2): n>0. Da har man at M oppfyller følgende krav:

(i) Γ er lukket under modus ponens.

(ii) Er m+1>0 har vi at K(n,m) Inkl Γ.

(iii) Er m=0 &Γ≠ø → K(n,m) Inkl Γ.

Er da m>0 følger m+1>0 og derfor K(n,m-1) Inkl K(n,m) Inkl Γ. Man ser at det tredje kravet er trivielt oppfylt om m>0 og at det følger fra det andre kravet om m=0.

Teorem 4.3 Er M=<υ,Γ,φ>ê||S(n,m)|| har man (Aα)(αêK(n,m)→ φ(α)=1)

Bevis: Dette bevises ved induksjon på n. *Basistrinn*: n=0. Vi skal først vise:

(1) Er M=<υ,Γ,φ>ê||S(0,m)|| har man (Aα)(αêK(0,m)→ φ(α)=1)

Vi viser (1) ved induksjon på m. Vi må derfor først vise at (1) holder i tilfelle m=0. Vi må i dette tilfelle vise: (1.1) M=<υ,Γ,φ>ê||S(0,0)|| → (Aα)(αêK(0,0)→ φ(α)=1). Anta (2) M=<υ,Γ,φ>ê||S(0,0)|| og anta for vilkårlig α at (3) αêK(0,0). Fra definisjonen av K(n,m) og (3) følger: αêk(0). Herav har vi i sin tur:

(4) α êPC* U Mg(Lα→α: αêFm(L)) U Mg(L(α→β)→Lα→Lβ: α,βêFm(L))

Er αêPC* har vi åpenbart φ(α)=1. Har vi α= (Lβ→β) for en eller annen formel β følger at

(5) φ(α) =1 ↔ φ(Lβ→β)=1 ↔ (φ(Lβ)=1 → φ(β)=1) ↔ (φ(β)=1 & βêΓ → φ(β)=1)

Siden vi åpenbart har at (φ(β)=1 & βêΓ → φ(β)=1) følger det at φ(α)=1 i dette tilfellet. Siden (2) holder har vi fra definisjonen av S(0,0)-modell at Γ er lukket under modus ponens. Anta α= (L(γ→β)→Lγ→Lβ) for noen formler γ,β. Vi må da vise at φ(α)=1. Nå har vi dersom φ(L(γ→β))=1 & φ(Lγ)=1 at φ(γ→β) & (α→β)êΓ & φ(γ)=1 & γêΓ. Siden Γ er lukket under modus ponens følger herav φ(β)=1 & βêΓ. Dette viser at φ(α)=1 i dette tilfellet. Vi har derfor vist at (4) holder. Fra dette kan vi i sin tur slutte at (1.1) holder.

For å vise at (1) holder må vi imidlertid også vise at denne påstanden holder for m+1 dersom den holder for m. Anta (1) holder for m. Anta M=<υ,Γ,φ> er en vilkårlig modell i ||S(0,m+1)||. Da vil M også være en S(0,m)-modell. Fra induksjonshypotesen følger da (6) (Aα)(αêK(0,m)→ φ(α)=1). Vi må vise at (6.1) (Aα)(αêK(0,m+1) →φ(α)=1). Anta αêK(0,m+1). Fra definisjonen av K(0,m+1) følger da at α enten er med i k(0) eller at α = L(m+1)(β→β) for en eller annen formel α. I det første tilfelle har vi αêk(0) Inkl K(0,m) og derfor at φ(α)=1 ved hjelp av (6). I det andre tilfelle har vi at L(m)(β→β)êK(0,m) og derfor at (7) φ(L(m)(β→β))=1. Men siden M er en S(0,m+1)-modell har vi per definisjon at (8) L(m)(β→β)êΓ. Fra dette og (7) følger φ(L(L(m)(β→β)))= φ(L(m+1)(β→β)) =1. Også i dette tilfelle har vi derfor at φ(α)=1. Dette viser at (6.1) holder. Vi har nå vist at (1) holder.

Induksjonstrinn: Anta satsen holder for n, dvs. anta at

(8) Er M=<υ,Γ,φ>ê||S(n,m)|| har man (Aα)(αêK(n,m)→ φ(α)=1).

© Morten Harboe Rognes

Vi skal vise at

(9) Er M=<υ,Γ,φ>êS(n+1,m) har man (Aα)(αêK(n+1,m)→ φ(α)=1)

Anta (10) M=<υ,Γ,φ>êS(n,m+1). Vi skiller mellom to tilfelle:

Tilfelle (i): m=0. Siden M er en S(n+1,m)-modell er den også en S(n,m)-modell. Det følger derfor fra (8) at (11) (Aα)(αêK(n,m)→ φ(α)=1). Fra (10) følger også at (12) Γ≠ø → K(n,m) Inkl Γ siden vi forutsetter m=0. Anta nå for vilkårlig α at (13) αêK(n+1,m). Dette impliserer at αê k(n+1) U Mg(L(m)(α→α): αêFm(L)). Siden m=0 følger fra dette αêk(n+1) U Mg(L(0)(α→α):αêFm(L)) =k(n+1). Da har vi enten αêk(n) eller at α= (Lγ→Lβ) for en eller annen formel βêk(n). I det første tilfelle har vi αêK(n,m) og derfor φ(α)=1 ifølge (11). I det andre tilfelle har vi, siden βêk(n) at βêK(n,m) og derfor ved hjelp av (11) at φ(β)=1. Anta Γ≠ø. Da følger fra (12) at K(n,m) Inkl Γ. Fra dette har vi βêΓ. Men da φ(β)=1 &βêΓ. Da følger φ(Lβ)=1 og derfor φ(α)= φ(Lγ→Lβ)=1. Er Γ=ø har vi uten videre φ(Lγ)≠1. Det følger i dette tilfellet også at φ(α)= φ(Lγ→Lβ)=1. Men α var en vilkårlig formel slik at (13). Dette viser at (Aα)(αêK(n+1,m)→ φ(α)=1) holder i dette tilfellet der m=0.

Tilfelle (ii): m>0. Siden M er en S(n+1,m) modell har vi per definisjon at (14) K(n,m-1) Inkl Γ. Men vi har også at M må være en S(n,m)-modell, og derfor ifølge (8), at (15) (Aα)(αêK(n,m-1)→ φ(α)=1). Anta nå for vilkårlig α at (16) αêK(n+1,m). Dette impliserer at αê k(n+1) U Mg(L(m)(α→α): αêFm(L)) siden m>0.

Undertilfelle (a): αêk(n+1). Da har vi αêk(n) eller at α= (Lγ→Lβ) for en eller annen formel βêk(n). I det første tilfelle har vi αêK(n,m-1) og derfor φ(α)=1 ifølge (11).

I det andre tilfelle er βêK(n,m-1) for en eller annen formel β. Da følger ved hjelp av (11) at φ(β)=1. Nå har vi K(n,m-1) Inkl Γ. Fra dette har vi βêΓ. Men da φ(β)=1 &βêΓ. Da følger φ(Lβ)=1 og derfor φ(α)= φ(Lγ→Lβ)=1 I begge tilfelle har vi altså φ(α)=1.

Undertilfelle (b): αêMg(L(m)(α→α): αêFm(L)). Da har vi at det finnes β slik at βêFm(L) & α=L(m)(β→β). Da er α= L(L(m-1)(β→β)). Nå har vi L(m-1)(β→β)êK(n,m-1) og derfor at (17) φ(L(m-1)(β→β))=1 ved hjelp av (15). På den annen side har vi også ved hjelp av (14) at (18) L(m-1)(β→β)êK(n,m-1) Inkl Γ. Fra (17) og (18) følger φ(α)=φ(L(m)(β→β))=1.

Nå var α en vilkårlig formel slik at (16). Vi har derfor vist: (Aα)(αêK(n+1,m) → φ(α)=1). Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for at (9) holder gitt at (8) holder. Dette avslutter vårt bevis for satsen. **QED**.

Teorem 4.4 Man har αêS(n,m) ↔ (AM)(Mê||S(n,m)|| → π;3(M)(α)=1)

Bevis: (A) Når det gjelder kondisjonalen mot høyre følger den ved hjelp av foregående teorem. S(n,m) er jo den minste formelmengden som inneholder K(n,m) og som er lukket under modus ponens. Fra Teorem 4.3 følger

(Aα)(αêK(n,m) → (AM)(Mê||S(n,m)|| → π;3(M)(α)=1))

Siden vi imidlertid har at modus ponens bevarer gyldighet følger at vi har:

αêS(n,m) ↔ (AM)(Mê||S(n,m)|| → π;3(M)(α)=1)

(B) Vi må imidlertid også vise fullstendighetsdelen i dette teoremet, det vil si kondisjonalen mot venstre.

Anta nêN og at ¬(αêS(n,m)). Da er {¬α} en S(n,m)-konsistent formelmengde. Denne kan ved hjelp av Lindenbaums lemma utvides til en maksimalt S(n,m)-konsistent mengde Δ. Da har vi naturligvis at (1) (¬α)êΔ. Definer nå S(n,m)-modell M=<υ,Γ,φ> ved å sette:

© Morten Harboe Rognes

(2) $\upsilon(p) = 1 \leftrightarrow p \hat{e} \Delta$ for alle utsagnsvariabler p. Definer videre Γ ved:
(3) $\Gamma = Mg(\alpha: L\alpha \hat{e} \Delta)$. La endelig φ være valuasjonsfunksjonen av annet slag som er assosiert med strukturen $<\upsilon,\Gamma>$. Ved et enkelt induksjonsbevis viser man:

(4) $(A\beta)(\beta \hat{e} Fm(L) \rightarrow (\varphi(\beta)=1 \leftrightarrow \beta \hat{e} \Delta))$.

Vi utelater detaljene her siden beviset er basert på helt opplagte egenskaper ved maksimalt konsistente mengder, samt egenskaper til funksjonen φ.

Det som nå må gjøres er å vise at denne modellen er en S(n,m)-modell. Vi sondrer mellom forskjellige tilfelle:

Tilfelle (a): n=0 og m>=0. Da må vi i lys av Definisjon 4.4 vise at M oppfyller kravene:

(5.1) Γ er lukket under modus ponens

(5.2) Er m>0 har man at $L(k)(\alpha \rightarrow \alpha) \hat{e} \Gamma$ for alle $\alpha \hat{e} \Gamma$ dersom $0 =< k < m$

Siden Δ i dette tilfelle er en maksimalt S(0,m)-konistent mengde har vi siden K(0,m) Inkl S(0,m) at (6) K(0,m) Inkl Δ. Fra definisjonen av K(0,m) har vi da:

(7) $K(0,m) = k(0) \cup Mg(L(k)(\alpha \rightarrow \alpha): k =< m)$ Inkl Δ. Siden k(0) Inkl Δ følger at $(L(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow L\alpha \rightarrow L\beta) \hat{e} \Delta$. Fra dette, definisjonen av Γ og elementære egenskaper til maksimalt konsistente mengder følger at Γ er lukket under modus ponens, dvs. at (5.1) holder.

Fra (6) og (7) kan man også slutte $Mg(L(k)(\alpha \rightarrow \alpha): k =< m)$ Inkl Δ. Fra dette følger at dersom $0 =< k < m$ har man at $L(k+1)(\alpha \rightarrow \alpha) \hat{e} \Delta$ og derfor at $L(k)(\alpha \rightarrow \alpha) \hat{e} \Gamma$ i lys av (3). Dette viser at M i dette tilfellet også oppfyller kravet (5.2)

Tilfelle (b): n>0 og m=0. Det vil da i lys av Definisjon 4.4 være tilstrekkelig å vise at M oppfyller kravene:

(8.1) Γ er lukket under modus ponens

(8.2) $\Gamma \neq \emptyset \rightarrow K(n-1,0)$ Inkl Γ.

At M i dette tilfellet oppfyller (8.1) vises på samme måte som i det foregående tilfelle. Nå har man i dette tilfelle at K(n,0) Inkl S(n,0) Inkl Δ. Videre har vi ved hjelp av Definisjon 4.1 og Definisjon 4.2 at $K(n,0) = k(n)$ og $K(n-1,0) = k(n-1)$. Anta nå at (9) $\Gamma \neq \emptyset$ og (10) $\beta \hat{e} k(n-1)$ for vilkårlig β. Da har vi fra (9) at det finnes en γ slik at (11) $L\gamma \hat{e} \Delta$. Fra (10) og definisjonen av k følger da at $(L\gamma \rightarrow L\beta) \hat{e} k(n)$. Men $k(n)=K(n,0)$ Inkl S(n,0) Inkl Δ. Vi må derfor ha (12) $(L\gamma \rightarrow L\beta) \hat{e} \Delta$. Fra dette og (11) følger $L\beta \hat{e} \Delta$. Men β var en vilkårlig formel slik at (10). Det følger at $K(n-1,0)=k(n-1)$ Inkl Γ. Dette viser at M oppfyller kravene (8.1) og (8.2) og derfor i dette tilfellet er en S(n,m)-modell.

Tilfelle (c): n>0 og m>0. Det vil da i lys av Definisjon 4.4 være tilstrekkelig å vise at M oppfyller kravene:

(13.1) Γ er lukket under modus ponens

(13.2) Er m>0 har vi at K(n-1,m-1) Inkl Γ

Siden vi har K(n,m) Inkl S(n,m) og vi har at k(0) Inkl K(n,m). Har vi at $L(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow L\alpha \rightarrow L\beta$ er med i Δ. Fra dette, elementære egenskaper ved maksimalt konsistente mengder og definisjonen av Γ følger (13.1). Vi må imidlertid vise (13.2). Anta (14) $\beta \hat{e} K(n-1,m-1)$ for vilkårlig β. Da har vi i lys av Definisjon 4.2:

$\beta \hat{e} k(n-1) \cup Mg(L(k)(\alpha \rightarrow \alpha): k =< (m-1) \ \& \ \alpha \hat{e} Fm(L))$. Vi skiller nå mellom to tilfelle:

Tilfelle (i): $\beta \hat{e} k(n-1)$. Da har vi for alle γ at (14) $(L\gamma \rightarrow L\beta) \hat{e} k(n)$ Inkl K(n,m) Inkl S(n,m) Inkl Δ siden er en S(n,m)-maksimalt konsistent mengde. Siden m>0 har vi $L(\alpha \rightarrow \alpha) \hat{e} S(n,m)$ og derfor $L(\alpha \rightarrow \alpha) \hat{e} \Delta$. Fra dette og (14) følger $L\beta \hat{e} \Delta$ og derfor $\beta \hat{e} \Gamma$.

Tilfelle (ii): $\beta \hat{e} Mg(L(k)(\alpha \rightarrow \alpha): k =< (m-1) \ \& \ \alpha \hat{e} Fm(L))$. Da har vi $\beta = L(k)(\alpha \rightarrow \alpha)$ for noe $k =< (m-1)$. Det følger da $L(\beta) = L(k+1)(\alpha \rightarrow \alpha) \hat{e} K(n,m)$ Inkl Δ. Fra dette kan vi så slutte på basis av definisjonen av Γ at $\beta \hat{e} \Gamma$. Siden β var en vilkårlig formel som oppfylte (14) har

© Morten Harboe Rognes

man at (13.2) holder. Også i dette tilfelle vil derfor M være en S(n,m)-modell.

I alle tilfelle har vi at M er en S(n,m)-modell. Med andre ord har vi (15) Mê||S(n,m)||. Fra (1) og (4) følger at (16) ¬(φ(α)=1). Det følger fra (15) og (16) at (EM)(Mê||S(n,m)|| & ¬(π;3(M)(α)=1)). Dette viser at fullstendighetsdelen i teoremet holder. **QED**.

Definisjon 4.5 Vi definerer en sekvens av formler slik. Merk at p, q og r er de tre første setningsbokstavene i L. Vi setter:

A;0 = L(p v¬p) → L(q v ¬ q)

A;(n+1) = L(r→r) → L(A;n)

Teorem 4.5 (Am)(mêN → ¬(A;0êS(0,m))

Bevis: Anta mêN. Sett Γ = Mg(L(j)(α→α):0=<j=<m)U{pv¬p} Definer υ ved å sette at υ(r)=0 for enhver utsagnsvariabel r. Sett tilslutt M= <υ,Γ,φ> der φ er valuasjonsfunksjonen av annet slag assosiert med modellstrukturen <υ,Γ>. Man ser at ser at M oppfyller kravene til en S(0,m)-modell: (i) Vi har for alle α,β at dersom αêΓ & (α→β)êΓ → βêΓ. Siden Γ ikke inneholder noen formel av typen α→β holder dette fordi antesedenten i kondisjonalen alltid er usann. Γ er derfor lukket under modus ponens. Det andre kravet som stilles til en S(0,m)-modell er også oppfyllt: (ii) Er m>0 har man at L(k)(α→α)êΓ for alle αêΓ dersom 0=<k<m. Man ser nå at qv¬q ikke er med i Γ. Vi har derfor (1) φ(L(qv¬q)=0. Videre har vi per definisjon av Γ at (pv¬p)êΓ. Videre er det åpenbart at φ(pv¬p)=1. Det følger at (2) φ(L(pv¬p))=1. Fra (1) og (2) følger: φ(L(p v¬p) → L(q v ¬ q))=0, med andre ord at φ(A;0)=0. Det finnes derfor en S(0,m)-modell M der vi har π;3(M)(A;0)=0. Fra dette og Teorem 4.4 følger ¬(A;0êS(0,m)). Dette viser at påstanden holder. **QED**.

Teorem 4.6 Man har om m,n>=0 og α er en formel i L:

S(n+1,m) |- (L(r→r) → Lα) → S(n,m)|- α

Bevis: Anta ¬(S(n,m)|- α). Da har vi ved hjelp av Teorem 4.4 at det finnes en S(n,m)-modell M=<υ,Γ,φ> slik at (1) φ(α)=0. Sett per definisjon (2) Γ*= Mg(α: αêFm(L) & φ(α)=1) Fra Teorem 4.3 har vi da at

(3) K(n,m) Inkl Γ*. Dessuten har vi:

(4) (Aα)(Aβ)(αêΓ* & (α→β)êΓ* → βêΓ*)

Definer en verditilordning υ for setningsvarablene i L ved å sette υ(p)=0 om p er en setningsvariabel i L. Definer så modellen M* ved å sette M*= <υ,Γ*,φ*> der φ* er en valuasjonsfunksjon av annet slag assosiert med den halvsyntaktiske modellstrukturen <υ,Γ*>. Da har vi åpenbart i lys av (3) og (4):

(5) Γ* er lukket under modus ponens

(6) Er m>0 har vi at K(n,m-1) Inkl Γ*.

(7) Er m=0 &Γ≠ø → K(n,m) Inkl Γ*.

Dette innebærer at M* oppfyller kravene til en S(n+1,m)-modell. Nå har vi fra (1) og (2) at (8) ¬(αêΓ*). Dette impliserer at (9) φ*(Lα)=0. På den annen side er det åpenbart at (10) (r→r)êΓ* siden φ(r→r)=1 og at (11) φ*(r→r)=1. Fra (10) og (11) følger så at (12) φ*(L(r→r))=1. Men fra (9) og (12) følger φ*(L(r→r)→Lα)=0. Siden M* er en S(n+1,m)-modell følger det at det finnes en slik modell der vi har at L(r→r)→Lα er usann. Fra dette og Teorem 4.4 følger så ¬(S(n+1,m) |- (L(r→r) → Lα)). **QED**.

© Morten Harboe Rognes

Teorem 4.7
(a) (An)(nêN → ¬(S(n,m)|- A;n))
(b) (An)(nêN → S(n+1,m)|- A;n)

Bevis: *Ad (a)*: Påstanden bevises ved induksjon på n.
Basistrinn: Fra Teorem 4.5 har vi:
(Am)(mêN → ¬(A;0êS(0,m)). Herav ¬(A;0êS(0,m). ie. ¬(S(0,m)|- A;0). Satsen holder derfor om n=0.

Induksjonstrinn: Anta satsen holder for n, med andre ord at (1) ¬(S(n,m) |- A;n). Vi må da vise at ¬ (S(n+1,m) |- A;n+1), med andre ord at (2) ¬ (S(n+1,m) |- L(r→r) → L(A;n)). Fra Teorem 4.6 følger imidlertid S(n+1,m) |- (L(r→r) → L(A;n)) → S(n,m)|- A;n. Fra dette og (1) følger så (2). Dette viser at induksjonstrinnet lar seg gjennomføre og at (a) holder.

Ad (b): Vi skal først vise at (1) (An)(nêN → A;nêk(n+1)). Siden vi har for alle nêN at k(n+1) Inkl K(n+1,m) Inkl S(n+1,m) følger punkt (b) om vi kan vise (1). Når det gjelder (1) vises dette ved et enkelt induksjonsbevis på n:

Basistrinn: n=0. Da har vi A;0 = L(p v¬p) → L(q v ¬ q). Siden (q v ¬q)êk(0) (Se Definisjon 4.1) har vi at har vi at (Lα→ L(q v ¬ q))êk(1) for alle αêFm(L) og derfor at
A;0 = L(p v¬p) → L(q v ¬ q) êk(1). Dette viser at (1) holder for n=0.

Induksjonstrinn: Anta A;nêk(n+1). Da har vi åpenbart fra definisjonen av k at A;(n+1) = (L(r→r) → L(A;n))êk(n+2). Dette viser at induksjonstrinnet holder. Det følger at (1) holder. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Teorem 4.7 (An)(nêN → S(n,m) SInkl S(n+1,m))

Bevis: At (An)(nêN → S(n,m) Inkl S(n+1,m)) følger direkte fra Teorem 4.1e.. Fra Teorem 4.6 følger: (An)(nêN → A;n êS(n+1,m) & ¬(A;nêS(n,m))). Fra disse to forhold følger så satsen. **QED**.

Vi kan nå fullføre det mål vi har satt oss, nemlig å gi et bevis for at E2, S2 og S2(m) for m>=0 ikke kan aksiomatiseres ved hjelp av et endelig antall formler i L når slutningsreglene bare er modus ponens og uniform subsitusjon. Det følgende teorem oppsummerer denne konklusjon:

Teorem 4.8 Systemene E2, S2 og S2(m) for m>=0 er ikke endelig aksiomatiserbare.

Bevis: (a) Vi har fra Teorem 4.2 at (1) E2 = UN/j,0,∞/(S(n,0)). Anta for reduktio ad absurdum at E2 er endelig aksiomatiserbar. Da finnes det en endelig mengde med formler, X= {β;1,..., β;k}, slik at Π(X) =E2. Fra definisjonen av Π følger at X Inkl Π(X)=E2. Man har derfor {β;1,..., β;k} Inkl E2. Dette, og punkt (a), impliserer {β;1,..., β;k} Inkl UN/j,0,∞/ (S(n,0)) . Fra dette følger at det finnes naturlige tall a;1,...,a;k slik at β;j êS(a;j,0) for j=1,...,k. La b være det største av tallene a;1,...,a;k. Nå kan man lett vise ved hjelp av Teorem 4.7 at S(q,0) Inkl S(r,0) om q=<r. Det følger at β;jêS(a;j,0) Inkl S(b,0) for alle j=1,..,k. Dette innebærer at X Inkl S(b,0). Men S(b,0) er lukket under modus ponens. Man innser også lett at S(b,0) er lukket under uniform substitusjon. Det følger at Π(X) Inkl S(b,0). Men S(b,0) er strengt inkludert i S(b+1,0) ifølge Teorem 4.7. Da må S(b,0) også være strengt inkludert i E2. Det følger at Π(X) SInkl E2. Men dette strider åpenbart mot Π(X)=E2. Dette viser at E2 ikke

© Morten Harboe Rognes

er endelig aksiomatiserbar. (b) For å få bevis for at S2 og S2(m) ikke er endelig aksiomatiserbare behøver man bare å erstatte alle forekomster av S(n,0) i beviset ovenfor med henholdsvis S(n,1) og S(n,m). Bevisene blir helt analoge og det er nokså poengløst å skrive dem ut i detalj. **QED**.

© Morten Harboe Rognes

Referanser

Kripke [1] Kripke, S.A., 1963, "Semantical analysis of modal logic I, normal propositional calculi", *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*", Vol 9, pp. 67 - 96

Kripke [2] Kripke, S.A., 1965, "Semantical analysis of modal logic II, non-normal modal propositional calculi", *The Theory of Models* (ed. J.W. Addison, L. Henkin, A. Tarski), Amsterdam, North Holland Publishing Co., pp. 206 -220

Rognes [1] Rognes, M.H., 1971, *Halvsyntaktiske modeller og normale modale setningslogiske systemer*, Upublisert manuskript.

Rognes [2] Rognes, M.H., 1971, *Halvsyntaktiske modeller og deontisk logikk,* Upublisert manuskript.

Rognes [3] Rognes, M.H., 1971, *Halvsyntaktiske modeller og unormale setningslogiske modalsystemer,* Upublisert manuskript.

Rognes [4] Rognes, M.H., 1971, *Setningslogiske modalsystemer med McKinsey-Tarski egenskapen ,* Upublisert manuskript.

© Morten Harboe Rognes